Universiteit Utrecht

Determinisme en Wetmatigheid

Dennis Dieks

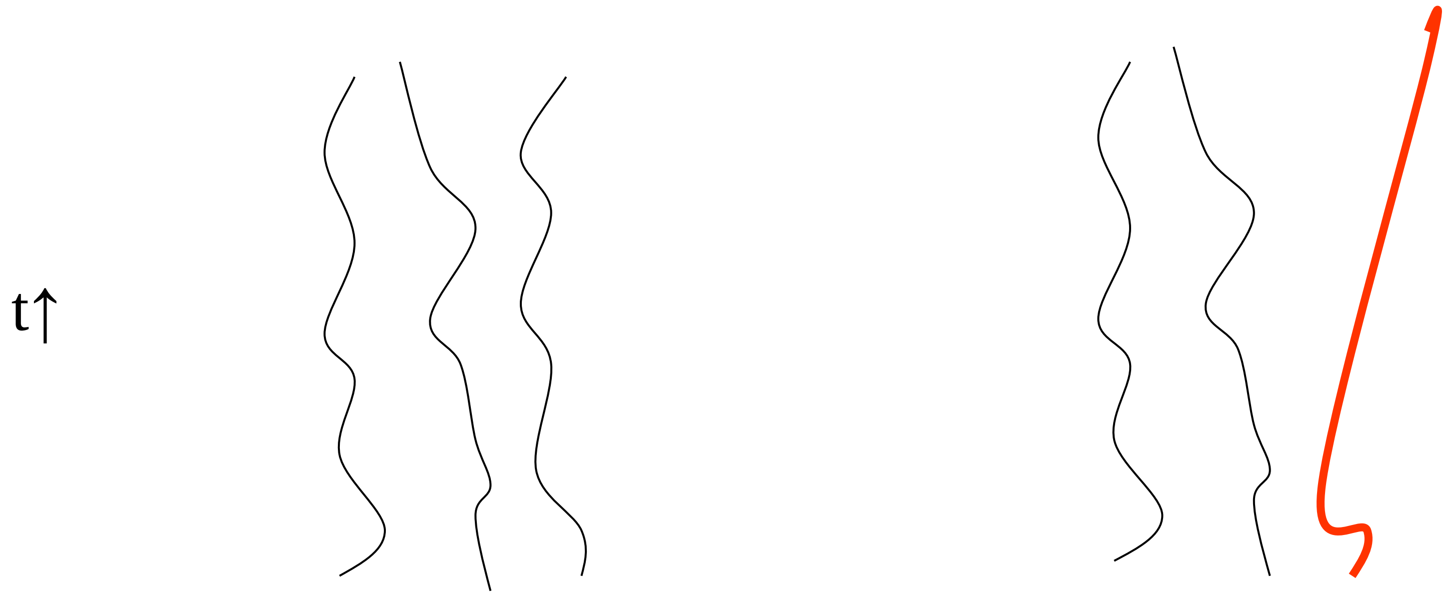
History and Foundations of Science, UU

Determinisme in de natuurwetenschappen.

- Een *theorie* is deterministisch als de “toestand” op één ogenblik volgens de theorie op ieder willekeurig later moment één unieke toestand vastlegt.
- De wereld is deterministisch als hij volledig wordt beschreven door een deterministische theorie

(NB. Dit hoeft niet altijd tot *voorspelbaarheid* te leiden.)

Slechts één evolutie mogelijk bij gegeven aanvangstoestand



Elk tweetal geschiedenissen die een situatie op een moment gemeen hebben vallen *altijd*, *volledig*, samen

schoolvoorbeeld

Vrij deeltje volgens de mechanica van Newton: de toestand (x_0, v) op t_0 legt de toestand (positie en snelheid) op ieder later moment vast:

$$x(t) = x_0 + v(t-t_0)$$

Renati Descartes ***Principia Philosophiae*** (1644):

Lex Naturae:

Voor elk materiedeeltje geldt dat als het aan zichzelf wordt overgelaten het nooit langs wat voor kromme lijn dan ook zal bewegen, maar altijd eenparig langs een rechte lijn zal gaan

1687
Newtons Principia

WETTEN

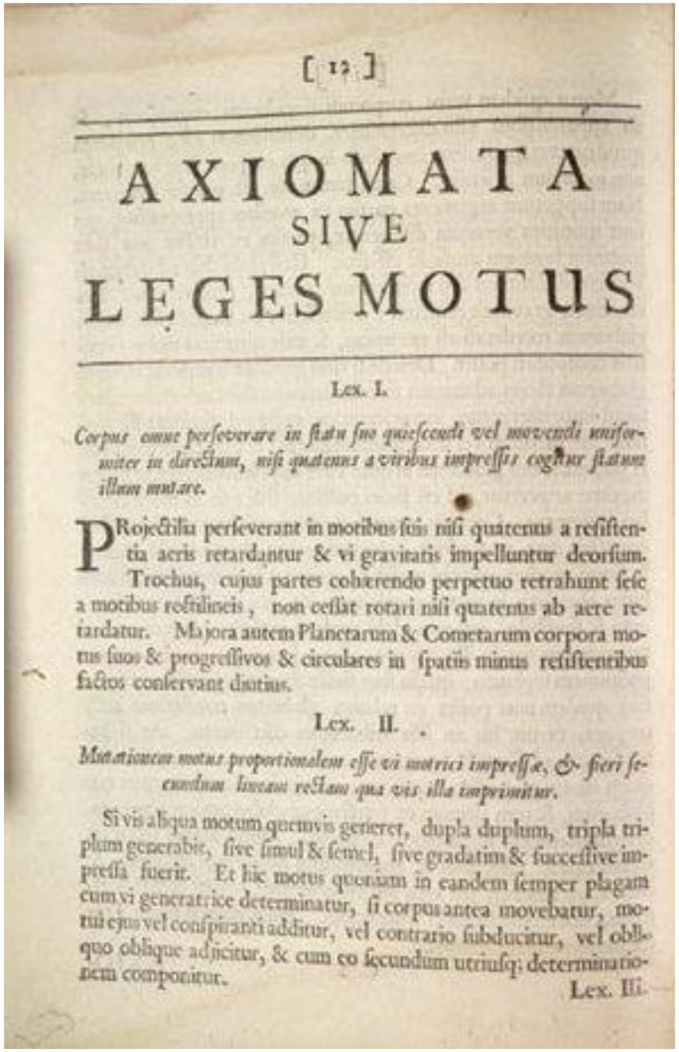
Lex I Traagheidswet

Lex II F=m.a

Lex III Actie= -Reactie

+ **universele gravitatiewet:**

$$F = G\frac{m.M}{R^2}$$


[12]

AXIOMATA
SIVE
LEGES MOTUS

Lex. I.

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.

Projectilia perseverant in motibus suis nisi quatenus a resistentia aeris retardantur & vi gravitatis impelluntur deorsum. Trochus, cujus partes cohaerendo perpetuo retrahunt sese a motibus rectilineis, non cessat rotari nisi quatenus ab aere retardatur. Majora autem Planetarum & Cometarum corpora motus suos & progressivos & circulares in spatiis minus resistentibus factos conservant diutius.

Lex. II.

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Si vis aliqua motum quemvis generet, dupla duplum, tripla triplum generabit, sive simul & semel, sive gradatim & successive impressa fuerit. Et hic motus quoniam in eandem semper plagam cum vi generatrice determinatur, si corpus antea movebatur, motui ejus vel conspiranti additur, vel contrario subducitur, vel oblique oblique adjicitur, & cum eo secundum utriusq; determinationem componitur.

Lex. III.

Bewegingsvergelijkingen

$$ma = m\frac{dv}{dt} = m\ddot{x} = m\frac{d^2x}{dt^2} = F(x)$$

De wetten krijgen de vorm van een differentiaalvergelijking, en de taak van de fysicus is deze vergelijking op te lossen gegeven x_0, v_0, en $F(x)$.

In de context van de Newtoniaanse ("klassieke") fysica:
determinisme = uniciteit van de oplossingen van de differentiaalvergelijkingen die de beweging beschrijven, gegeven de begincondities.

Common knowledge:
De klassiek fysica is het voorbeeld *par excellence* van determinisme, zoals wordt geïllustreerd door talloze voorbeelden.

Stap terug: de bewegingsleer van Aristoteles

- W . v = F (weerstand maal snelheid is gelijk aan de kracht; de kracht gedeeld door de weerstand geeft de snelheid)

- Dit is een voorbeeld van een lineaire vergelijking ax = b, en zoals ook common nowledge is heeft die vergelijking een unieke oplossing voor x, nl. x = b/a. Dus de Aristotelische bewegingsleer is deterministisch.

Of indeterministisch?

Als a = b = 0, voldoet *iedere* x aan a.x=b!

Éen tegenvoorbeeld is voldoende om een algemene stelling onderuit te halen, dus de bewegingsleer van Aristoteles is indeterministisch?!

Maar Aristoteles draait het argument om: de situatie met W = 0 *kan niet bestaan:* een vacuum is onmogelijk.

Dus de Wet W. v = F is niet de volledige theorie van Aristoteles, maar moet worden aangevuld met een substantiële veronderstelling over de werkelijkheid waarop de theorie wordt toegepast ("randvoorwaarde").

Die extra veronderstelling maakt de theorie pas deterministisch.

MÉMOIRE

Sur les Solutions particulières des Équations différentielles et des Équations aux différences.

Lu à l'Institut le 23 Floréal an 13.

Par M. Poisson.

Il existe des équations différentielles de tous les ordres, qui admettent des solutions particulières, c'est-à-dire, des solutions qui ne sont pas comprises dans leurs intégrales. Ce genre de solutions n'est pas moins important à considérer que les intégrales elles-mêmes ; car lorsqu'un problème conduit à une équation différentielle, c'est souvent la solution particulière de cette équation qui renferme la vraie solution du problème. Aussi les géomètres, dans le siècle dernier, se sont beaucoup occupés de la recherche de ces solutions, soit lorsque l'intégrale complète est connue, soit quand on connaît seulement l'équation différentielle ; mais, malgré leurs travaux, il m'a paru qu'il restait encore quelques points de cette théorie à éclaircir, sur-tout relativement aux équations différentielles d'un ordre supérieur au premier. J'ai aussi pensé que cette théorie pouvait être étendue aux équations aux différences finies ; et il est assez remarquable que cette extension, quelque naturelle qu'elle paraisse, n'ait point encore été faite. En effet, la seconde intégrale que *Charles* a trouvée, et celles que j'ai fait connaître dans un autre mémoire, ne sont pas, comme on le verra dans la suite, les solutions particulières des équations aux différences.

Je m'occuperai seulement ici de la recherche des solutions particulières, dans le cas où l'intégrale n'est pas connue, et où il s'agit de déduire ces solutions de l'équation différentielle ou aux différences à laquelle elles doivent satisfaire. Le problème qui fera l'objet de ces recherches, peut donc être ainsi énoncé :

Unicity Conditions

If certain conditions ("Lipshitz conditions") are not satisfied, the equation **$F(x) = m\, d^2 x/dt^2$** is *not* guaranteed to have unique solutions.

For example, if $x_0 = v_0 = 0$, and $F(x) = mb^2x^a$, with $0<a<1$, then $F(x) = m\, d^2 x/dt^2$ is satisfied by:

$x(t) = 0$ for all t;

and by $x(t) = 0$ if $t \leq T$,

$x(t) = c. (t\text{-}T)^{2/1\text{-}a}$, if $t > T$, for arbitrary T.

(34) Prenons encore pour exemple le mouvement rectiligne d'un corps partant d'un point donné avec une vîtesse quelconque, et soumis à l'action d'une force attractive ou répulsive, constamment dirigée vers le point de départ, et proportionnelle à une puissance positive de la distance du mobile à ce point.

L'équation différentielle du mouvement, en désignant par x la distance du mobile au point de départ, et par t le temps, sera

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = a x^n,$$

n étant un exposant positif, que nous supposerons < 1, afin d'avoir une solution particulière; et a étant un coëfficient constant, positif dans le cas de la répulsion et négatif dans le cas contraire.

Cette équation a pour intégrale première

$$\frac{dx^2}{dt^2} = b^2 + \frac{2ax^{n+1}}{n+1},$$

b désignant la constante arbitraire et la vîtesse au point de départ, où l'on suppose $x = 0$; et dans le cas où l'on a $b = 0$, on peut encore intégrer l'équation précédente, ce qui donne

$$t = c + \frac{2}{1-n} \cdot \sqrt{\left(\frac{1+n}{2a}\right)} \cdot x^{\frac{1-n}{2}},$$

c étant la constante arbitraire. On détermine cette constante, en supposant que t soit nul en même temps que x, ce qui donne $c = 0$, à cause que l'exposant $1 - n$ est positif. L'intégrale complète devient alors

$$t = \frac{2}{1-n} \cdot \sqrt{\left(\frac{1+n}{2a}\right)} \cdot x^{\frac{1-n}{2}}.$$

De plus, l'équation du mouvement $\frac{d^2 x}{dt^2} = a x^n$ a pour solution particulière algébrique (numéro 21), l'équation $x = 0$; et dans le cas que nous examinons, c'est cette solution qui résout le problème; car il est visible que le mobile doit rester au point de départ, puisqu'en ce point sa vîtesse et la force à laquelle il est soumis, sont égales à zéro.

Il faut observer que si l'on suppose a négatif, l'intégrale précédente donnera pour le temps, en fonction de l'espace parcouru, une expression imaginaire, particulières qui, le plus souvent, ne satisfont pas aux équations du second ordre; et, d'un autre côté, elles ne renferment pas les solutions particulières des équations du second ordre, auxquelles cependant on est obligé d'avoir égard, si l'on veut résoudre complétement le problème proposé.

(36) Ces exemples suffisent pour montrer la nécessité d'avoir égard aux solutions particulières dans les problèmes de dynamique, et la difficulté qui se présente, lorsqu'il s'agit de choisir entre la solution particulière et l'intégrale complète. Le mouvement dans l'espace d'un corps soumis à l'action d'une force donnée, et partant d'une position et avec une vîtesse aussi données, doit être absolument déterminé. C'est donc une sorte de paradoxe, que les équations différentielles dont ce mouvement dépend, puissent être satisfaites par plusieurs équations qui remplissent en outre les conditions initiales du mouvement. Il ne paraît pas qu'on ait déjà remarqué cette difficulté, sur laquelle il était bon d'appeler l'attention des géomètres.

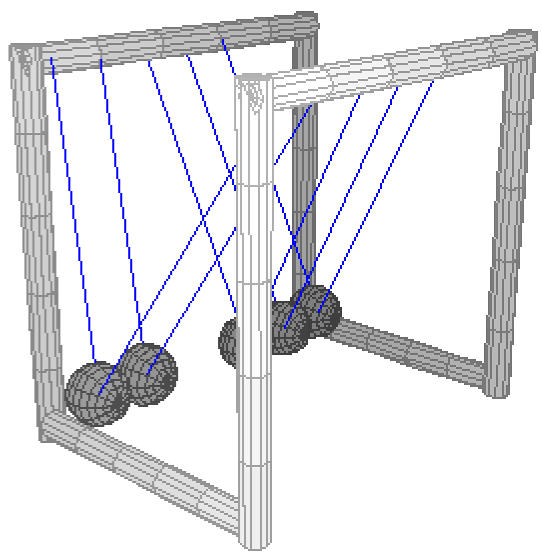
Les questions qu'*Euler* a résolues dans sa mécanique, et qui conduisent à des équations différentielles susceptibles de solutions particulières, ne sont pas de l'espèce de celles que nous avons choisies ci-dessus pour exemples. *Euler* se propose de trouver des courbes sur lesquelles un corps soumis à l'action d'une force donnée, puisse se mouvoir en remplissant certaines conditions. Par exemple, dans le numéro 268 du second volume, il cherche une courbe qui jouisse de cette propriété, qu'un corps pesant, projeté avec une vîtesse horizontale donnée, se meuve sur cette courbe en conservant toujours la même vîtesse horizontale. Rien n'empêche qu'il y ait plusieurs courbes qui jouissent de cette propriété; et, en effet, le calcul donne, pour la courbe cherchée, une parabole ou une droite horizontale.

Pour le faire voir, appelons x et y l'abscisse horizontale et l'ordonnée verticale du mobile, comptées du point de départ; désignons par b la vîtesse horizontale, que l'on suppose dirigée dans le sens de x, et

Dus: de differentiaalvergelijkingen van de klassieke natuurkunde hebben niet *altijd* unieke oplossingen.

Als *alle mathematisch mogelijke* begincondities en krachten worden toegelaten in F=m.a, is determinisme *niet* verzekerd

Gebrek aan uniciteit komt veel vaker voor en speelt zelfs een rol in de toegepaste natuurkunde



D. Gale, An indeterminate problem in classical mechanics, American Mathematical Monthly 59 (1952) 291-295 ;
A.P. Ivanov, J. Appl. Maths Mechs 59 (1995) 887-902
Patrick Suppes, “In appreciation of the work of Alexandre Froda”, 1994.

CHAPTER I

THE EQUATIONS OF MOTION

§1. Generalised co-ordinates

ONE of the fundamental concepts of mechanics is that of a *particle*.† By this we mean a body whose dimensions may be neglected in describing its motion. The possibility of so doing depends, of course, on the conditions of the problem concerned. For example, the planets may be regarded as particles in considering their motion about the Sun, but not in considering their rotation about their axes.

The position of a particle in space is defined by its radius vector $\mathbf{r}$, whose components are its Cartesian co-ordinates x, y, z. The derivative $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ of $\mathbf{r}$ with respect to the time t is called the *velocity* of the particle, and the second derivative $d^2\mathbf{r}/dt^2$ is its *acceleration*. In what follows we shall, as is customary, denote differentiation with respect to time by placing a dot above a letter: $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$.

To define the position of a system of N particles in space, it is necessary to specify N radius vectors, i.e. $3N$ co-ordinates. The number of independent quantities which must be specified in order to define uniquely the position of any system is called the number of *degrees of freedom*; here, this number is $3N$. These quantities need not be the Cartesian co-ordinates of the particles, and the conditions of the problem may render some other choice of co-ordinates more convenient. Any s quantities $q_1, q_2, \ldots, q_s$ which completely define the position of a system with s degrees of freedom are called *generalised co-ordinates* of the system, and the derivatives $\dot{q}_i$ are called its *generalised velocities*.

When the values of the generalised co-ordinates are specified, however, the "mechanical state" of the system at the instant considered is not yet determined in such a way that the position of the system at subsequent instants can be predicted. For given values of the co-ordinates, the system can have any velocities, and these affect the position of the system after an infinitesimal time interval dt.

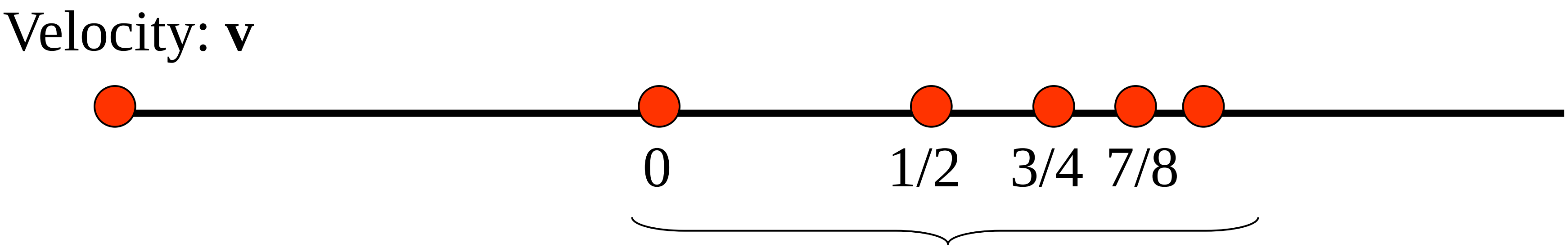
If all the co-ordinates and velocities are simultaneously specified, it is known from experience that the state of the system is completely determined and that its subsequent motion can, in principle, be calculated. Mathematically, this means that, if all the co-ordinates q and velocities $\dot{q}$ are given at some instant, the accelerations $\ddot{q}$ at that instant are uniquely defined.‡

---

† Sometimes called in Russian a *material point*.

‡ For brevity, we shall often conventionally denote by q the set of all the co-ordinates $q_1, q_2, \ldots, q_s$, and similarly by $\dot{q}$ the set of all the velocities.

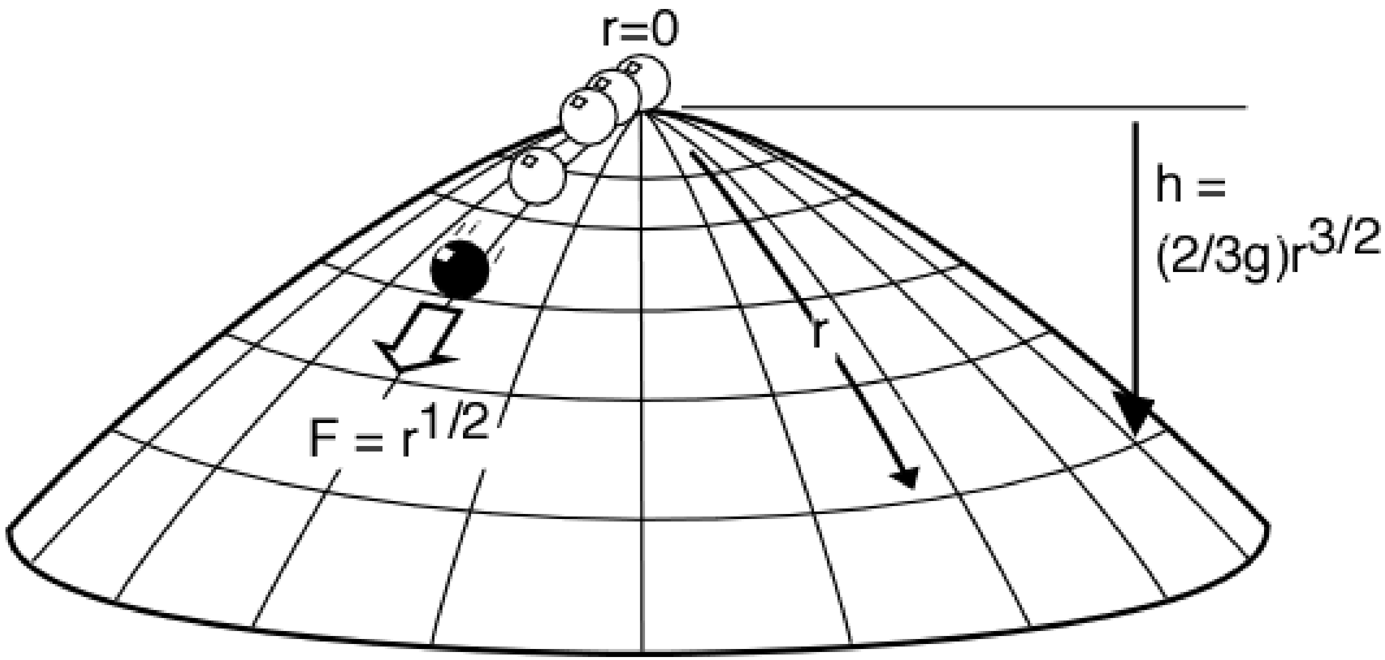
Example



Infinite number of initially resting balls in "Zeno" configuration

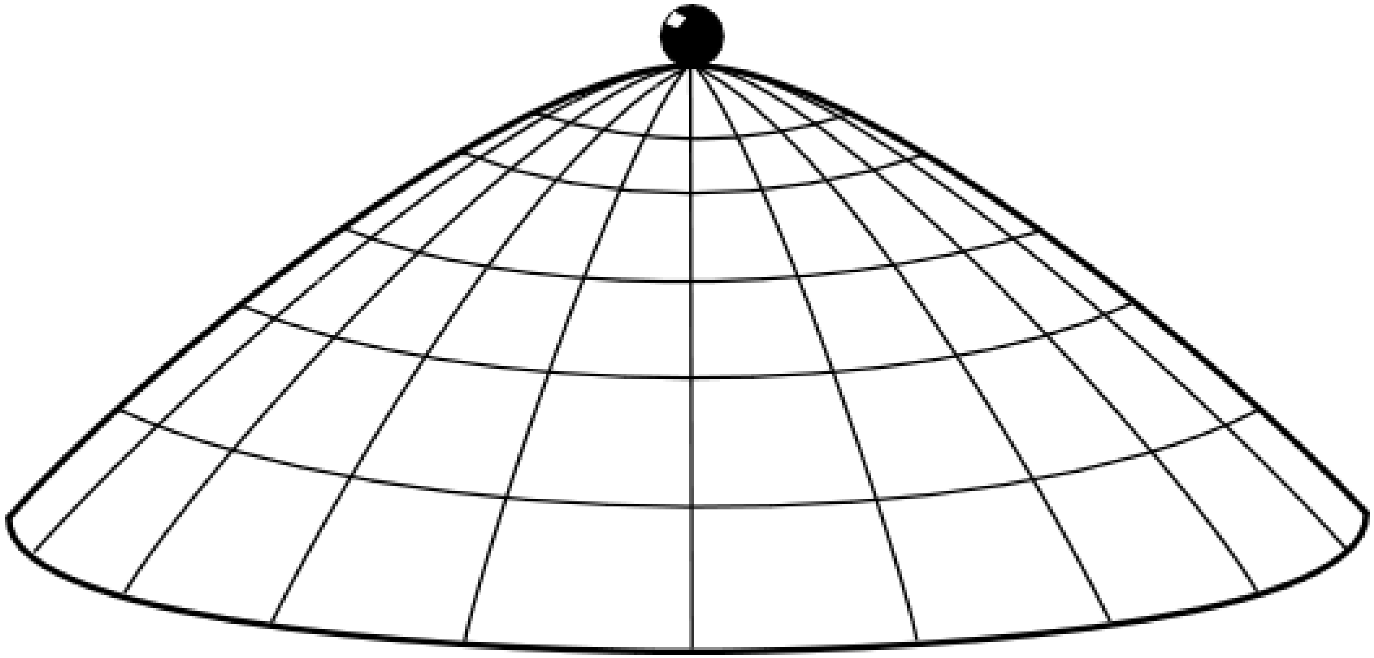
Reversal of time direction: spontaneously originating motion, conflicting with determinism

Other example (John Norton)

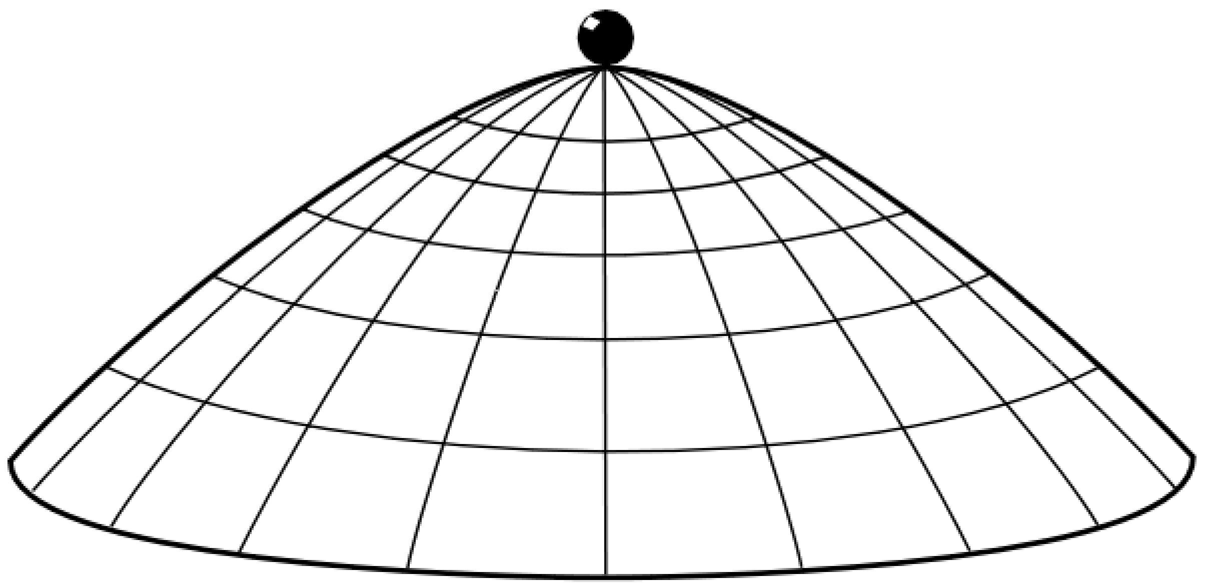


A point-like unit mass slides frictionlessly over the surface under the action of gravity. Newton's second law, F=ma, applied to the mass on the surface, allows *more than one solution* if we start with the mass on top.

Begin with rest, without net force: no motion



Or:



Motion or not? The equations do not tell us what will happen…

Is de klassieke mechanica deterministisch?

Norton:

- Not only can Newtonian systems violate energy and momentum conservation---determinism is also violated, and in a very strong sense: sometimes the equations do not tell us anything at all!
- “One wonders how this could be overlooked and how some can still sustain the myth of determinism in classical physics”
- Newtonian determinism is folklore!

Deze argumentatie berust op het definiëren van een natuurwetenschappelijke theorie als louter een verzameling Wetten, plus de eis dat determinisme uniciteit van oplossingen als eigenschappen van die Wetten betekent.

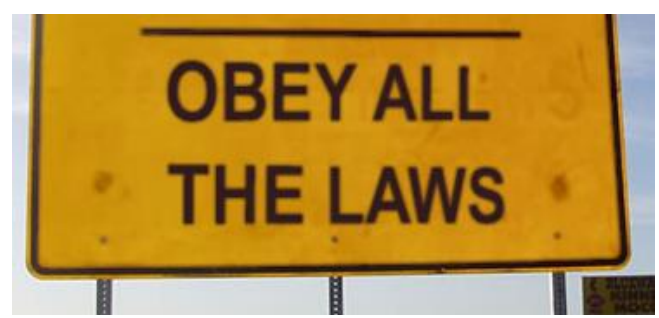
Maar dan wordt iedere theorie met algebraïsche vergelijkingen of differentiaalvergelijkingen ***a priori*** indeterministisch!

Vanuit wetenschapsfilosofisch standpunt is het niet vanzelfsprekend dat een theorie gelijk wordt gesteld aan een aantal wiskundige vergelijkingen “in vacuo”

Two views about laws:

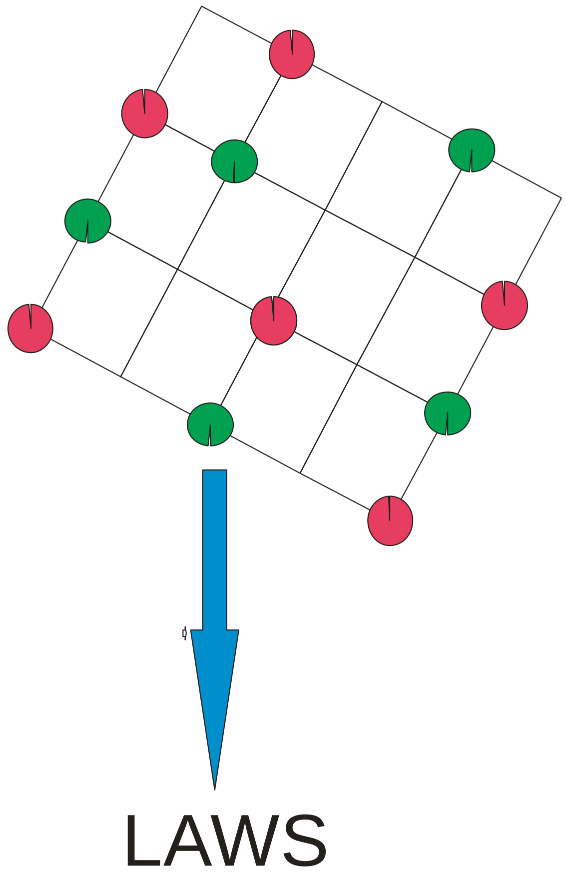
1. Laws tell the world how to behave.

   They *legislate* what is possible and what is not. They have an existence that is independent of what *actually* happens in our world. They *govern* the evolution of events in our world.



Alternative: the Humean viewpoint

regularities in the pattern of events in the world are **primary**



De empiristische, Humeaanse opvatting à la David Lewis

- Begin met het “mozaïek” van **feitelijke** gebeurtenissen en de patronen daarin
- “Natuurwetten” zijn de axioma’s van het best passende theoretische systeem, het systeem met de “best fit” aan deze feitelijke patronen; het systeem dat ze reproduceert

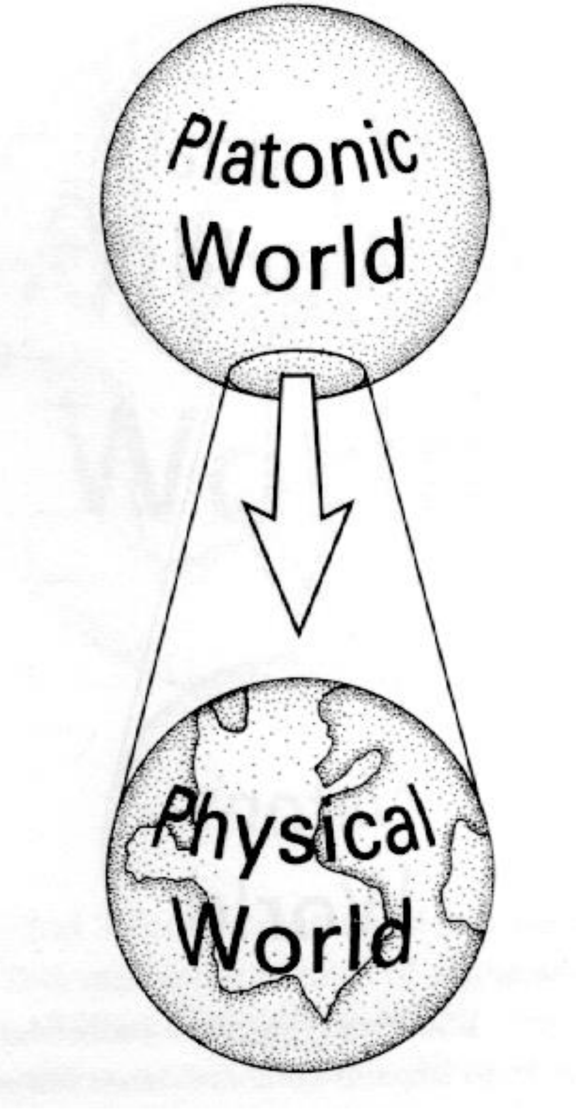
In deze opvatting van wetten en theorieën is er een directe band met wat feitelijk voorkomt --- zodat feitelijke randvoorwaarden in de theorie kunnen worden geïncorporeerd.

Volgens dit “actualistische” standpunt

- gaat het erom welke patronen/regelmatigheden feitelijk voorkomen,
- en wordt de determinisme-vraag een empirische vraag die wordt opgenomen in het uitgangspunt (komen situaties à la Norton daadwerkelijk voor in de patronen in de wereld?).
- Determinisme is dan een eigenschap van de wereld, en niet alleen van de wetten

Maar ook als we de klassieke mechanica opvatten als een verzameling Wetten,

zullen we om deze theorie een natuurwetenschappelijke (ipv zuiver mathematische) theorie te kunnen noemen iets moeten zeggen over de ***mogelijke werelden*** waarop de theorie van toepassing is.



Mogelijke werelden

- De empirische gegevens wijzen op een toepassingsdomein van de klassieke mechanica dat deterministisch is
- In (logisch) mogelijke werelden waarin de vergelijkingen geen unieke oplossingen bezitten is de theorie “onderbepaald” en kan niet functioneren als fysische theorie: er worden geen waarschijnlijkheden gespecificeerd voor de mogelijkheden, die oneindig in aantal zijn.
- Dus ook in deze context is beperking tot regelmatige werelden niet ***ad hoc***.

Conclusies

- De wereld op het beschrijvingsniveau van de klassieke mechanica is **deterministisch**; dit is een (inductief) empirisch resultaat.
- Om dit recht te doen in de wetenschapsfilosofische analyse moeten de wetten samen met randvoorwaarden worden beschouwd.
- De klassieke fysica als een verzameling wiskundig geformuleerde Wetten is niet deterministisch; maar dit is geen interessant resultaat.